Grundlegende Begriffe und Rechentechniken

<u>Inhaltsverzeichnis:</u>

0. Einleitung

Wir freuen uns, dass Sie sich für ein Studium in Deutschland, vielleicht sogar in Hamburg, interessieren. Falls Sie ein Fachstudium in den Bereichen Naturwissenschaft, Technik, Medizin oder Wirtschaft anstreben, werden Sie bei uns am Studienkolleg Hamburg einen Kurs besuchen, in dem Sie auch Unterricht im Fach Mathematik erhalten. Für den Besuch des T-Kurses müssen Sie bei Ihrer Eingangsprüfung auch einen Test in Mathematik bestehen. Um Ihnen den Einstieg zu erleichtern und zur Vorbereitung auf den Mathematiktest für den T-Kurs, finden Sie in diesem Skript Informationen dazu, welche mathematischen Kenntnisse Sie mitbringen müssen, damit Sie im Fach Mathematik einen guten Start haben. Vieles wird Ihnen aus Ihrer Schulzeit sicher noch im Gedächtnis sein. Sollten Sie etwas vergessen haben, finden Sie auf den nächsten Seiten Lösungsbeispiele und Übungsaufgaben mit Lösungen, die Ihnen helfen sollen, Ihr Wissen zu erneuern. Vielleicht schauen Sie ja auch noch einmal in Ihre alten Schulbücher! Am Ende haben wir wichtige Fachbegriffe noch einmal zusammengefasst. Damit Sie sich im Mathematikunterricht gut verständigen können, ist es wichtig, dass Sie die Fachsprache richtig erlernen. Fangen Sie doch gleich damit an! Am Anfang hilft es Ihnen bestimmt, wenn Sie die Begriffe in Ihre Muttersprache übersetzen und wie Vokabeln lernen. Eine gute Hilfe ist auch die Internetseite www.mathe-online.at oder ein Buch, mit dem wir am Studienkolleg arbeiten: Karl Bosch: Brückenkurs Mathematik. Eine Einführung mit Beispielen und Übungsaufgaben. München 2007 (ISBN 978-3-486-58410-3).

Viel Erfolg!

1.Rechnen in der Menge IR der reellen Zahlen

1.1 Rechnen mit Brüchen

Ein **Bruch** $\frac{a}{b}$ ist eine andere Darstellung der Division $\frac{a}{b} = a : b$. a heißt der **Zähler** und b heißt der **Nenner** des Bruches. Man kann Brüche addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren.

Rechenregeln:

$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}}$ Erweitern $\qquad \frac{a : d}{b : d} = \frac{a}{b}, a \in IR; b, d \in IR/\{0\}$ Kürzen

$\boxed{\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}}$ Addition und Subtraktion: $a; c \in IR; b, d \in IR/\{0\}$

$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$ Multiplikation: $a, c \in IR; b, d \in IR/\{0\}$

$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$ Division: $a \in IR; b, c, d \in IR/\{0\}$

Beispiele:

a) $\frac{-51{,}3}{3\pi} : \frac{17{,}1}{-2\pi} = \frac{(-51{,}3) \cdot (-2\pi)}{3\pi \cdot 17{,}1} = \frac{(-3) \cdot (-2)}{3} = 2$

b) $\frac{\sqrt{2}}{-\frac{2}{3}} - \frac{5\sqrt{2}}{-6} = \frac{-6\sqrt{2} - 5\sqrt{2}(-\frac{2}{3})}{(-\frac{2}{3}) \cdot (-6)} = \frac{(-6 + \frac{10}{3})\sqrt{2}}{4} = \frac{-\frac{8}{3}\sqrt{2}}{4} = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$

Übungsaufgaben mit Lösungen:

Berechne:

a) $\left(\frac{-3}{3{,}1} : \frac{-3}{3{,}5}\right) : \frac{-6}{3{,}7}$ b) $\frac{1}{-\frac{1}{2}} : \left(\frac{1}{3} + \frac{1{,}1}{2{,}5}\right)$ c) $\left(\frac{2{,}4}{3{,}1} - \frac{2{,}1}{6{,}2}\right) : \frac{6{,}7}{-9{,}3}$

d) $\left(2\frac{1}{2} - 4\frac{6}{7}\right) : \left(\frac{0{,}4}{5} + 7{,}4\right)$ e) $\left(3\frac{1}{2} - 0{,}4\right) : \left(7{,}4 - \frac{6}{5}\right)$

Lösungen:

a) $\frac{-12{,}95}{18{,}6}$ b) $\frac{-75}{29}$ c) $\frac{-8{,}1}{13{,}4}$ d) $\frac{-3}{9{,}52}$ e) $\frac{3{,}1}{6{,}2}$

1.2 Potenzen - Wurzeln - Logarithmen

Die Potenz:

Eine **Potenz** a^n (lies: „a hoch n“) stellt abgekürzt das Produkt von *n* gleichen Faktoren *a* dar. Man definiert:

$$\boxed{a \in IR \wedge n \in IN : a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a.... \cdot a}_{n-mal}}.$$

a heißt die **Basis** der Potenz, *n* heißt der **Exponent** der Potenz.

Definitionen zur Erweiterung des Potenzbegriffs:

$$a \neq 0 : a^0 = 1$$

$$a \neq 0 \wedge n \in IN : a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a \geq 0 \wedge n \in IN / \{1\} : a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Definition der Wurzel:

$$\boxed{a \in IR_0^+ \wedge n \in IN / \{1\} : \sqrt[n]{a} = |b| \Leftrightarrow |b|^n = a, b \in IR}$$

$\sqrt[n]{a}$ wird gelesen „*n*-te Wurzel aus *a*“. Das **Wurzel ziehen** ist eine Umkehrung zum Potenzieren. Mit der Wurzel bestimmt man die Basis einer Potenz.

Rechenregeln:

Rechnen mit **Potenzen (Potenzgesetze)**

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Rechnen mit **Wurzeln (Wurzelgesetze)**

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Beispiele:

a) $\sqrt[3]{4^{2,5} \cdot \sqrt{4}} = \left(4^{2,5} \cdot 4^{0,5}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(4^{2,,5+0,5}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{3}} = 4$

b) $\sqrt[n]{(a \cdot b)^{-\frac{1}{n}} \cdot \sqrt[n]{a^m \cdot b}} = \left(a^{-\frac{1}{n}} \cdot b^{-\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{m-1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m-1}{n^2}}$

Übungsaufgaben mit Lösungen:

Berechne so weit wie möglich!

a) $\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a^2}\right)^{2n}$ b) $\left(\sqrt[n]{a}\cdot a^{\frac{n-1}{n}}\right)^{n}$ c) $\dfrac{a^5\cdot b^3}{25}:\dfrac{5}{a^7\cdot b^2}$ d) $\left(-a^4\right)^{2n}$ e) $\left(-a^4\right)^{2n+1}$

f) $\dfrac{42x^{14}y^{12}}{72x^{11}y^3}$ g) $\dfrac{24x^3y^5}{11ab^2}:16x^2y^3$

Lösungen:

a) a^6 b) a^n c) $\dfrac{a^{12}b^5}{5^3}$ d) a^{8n} e) $-a^{8n+4}$ f) $\dfrac{7}{12}x^3y^9$ g) $\dfrac{3xy^2}{22ab^2}$

Ermittle die Lösung der Exponentgleichung!

a) $b^x=\dfrac{b^{11}}{b^4}$ b) $a^{x+3}=\dfrac{a^{2m+6}}{a^{2m+1}}$ c) $a^{2x+n}=\dfrac{a^{3x+2n}}{a^{3n}}$

Lösungen:

a) 7 b) 2 c) 2n

Berechne die Lösung mit dem Taschenrechner!

a) $3{,}4^{1{,}2}\cdot\sqrt[3]{9{,}84}$ b) $\dfrac{13{,}4^{2{,}5}}{14{,}6^2}\cdot 10^{1{,}2}$ c) $\sqrt[5]{34^{4{,}5}}\cdot\sqrt[4]{8123}$ d) $\left(24{,}3^{0{,}5}\cdot\sqrt{345{,}7}\right)^{0{,}2}$

Definition des Logarithmus:

$$\boxed{a\in IR^+/\{1\}\wedge x\in/R^+:\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x}$$

$\log_a x$ wird gelesen als „Logarithmus von *x* zur Basis *a*“. An der Definition sieht man, dass der **Logarithmus** *y* der Exponent ist, mit dem man eine Zahl *a* potenzieren muss, um *x* zu erhalten. Das **Logarithmieren** ist eine weitere Umkehrung zum **Potenzieren**. Mit dem Logarithmus bestimmt man den Exponenten einer Potenz.

Besondere Schreibweisen:

$\log_{10}x$, der Logarithmus zur Basis 10, wird auch als **Zehnerlogarithmus**, dekadischer Logarithmus oder Brigg'scher Logarithmus bezeichnet. Man schreibt: $\boxed{\lg x=\log_{10}x}$ (auf dem Taschenrechner die Taste $\boxed{\log}$.

$\log_e x$, der Logarithmus zur Basis *e* (*e*≈2,7), wird auch als der **natürliche Logarithmus** oder logarithmus naturalis bezeichnet. Man schreibt: $\boxed{\ln x=\log_e x}$.

Rechenregeln für Logarithmen (**Logarithmengesetze)**

$$\boxed{\begin{array}{l}\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y\\ \log_a(x:y)=\log_a x-\log_a y\\ \log_a x^n=n\cdot\log_a x\end{array}}$$

Einige Taschenrechner können Logarithmen mit beliebigen Basen nicht direkt berechnen. Man kann aber jeden Logarithmus mit Hilfe von Zehnerlogarithmen ausrechnen, denn es gilt:

$$\boxed{\log_a b=\frac{\lg b}{\lg a}}$$

Übungsaufgaben mit Lösungen:

Berechne:

a) $\log_6 36$ b) $\log_4 64$ c) $\lg 10$ d) $\log_a a^x$ e) $\log_{11}\frac{1}{11}$ f) $\log_4\frac{1}{1024}$

g) $\log_6\sqrt[3]{6}$ h) $\lg\sqrt[3]{100}$ i) $\log_{\frac{2}{3}}\frac{4}{9}$ j) $\log_{\frac{3}{4}}\frac{16}{9}$ k) $\log_2 0{,}125$ l) $\log_a\sqrt[n]{a^m}$

Lösungen:

a) 2 b) 3 c) 1 d) x e) -1 f) -5 g) $\frac{1}{3}$ h) $\frac{2}{3}$ i) 2 j) -2 k) -3 l) $\frac{m}{n}$

Berechne die **Lösungsmenge** der **Exponentialgleichungen**:

a) $3^{x+4}=14{,}5$ b) $8^{2x-3}=1500$ c) $37{,}5^{1-x}=2{,}5^{x-3}$ d) $\left(2^x-5\right)^2=100$

e) $3^x\cdot 9^{-x}=4^x\cdot 16^{-x}$

Lösungen:

a) -1,57 b) 3,26 c) 1,4 d) 3,9 e) 0

2. Terme

2.1 Termumformungen

Ein **Term** ist ein Rechenausdruck mit Zahlen und Buchstaben. Beispiele für Terme sind $7x+3ay-15$ oder $\frac{8}{3}x^2-45b$ oder $\frac{7y-3}{x^2}$.
Für die Buchstaben können reelle Zahlen eingesetzt werden, dann erhalten die Terme einen konkreten Wert.
Beim Rechnen mit reellen Zahlen gelten die folgenden Grundregeln:

Axiome der Addition:
Assoziativgesetz: $x+(y+z) = (x+y)+z$
Kommutativgesetz: $x+y = y+x$
Existenz der Null: Es gibt eine Zahl $0 \in IR$ mit $x+0 = x$ für alle $x \in IR$
Existenz des Negativen: Zu jedem $x \in IR$ existiert eine Zahl $-x \in IR$ mit $x+(-x) = 0$

Axiome der Multiplikation:
Assoziativgesetz: $(xy)z = x(yz)$
Kommutativgesetz: $xy = yx$
Existenz der Eins: Es gibt eine Zahl $1 \in IR$, so dass gilt $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in IR/\{0\}$
Existenz des Inversen: Zu jedem von 0 verschiedenen $x \in IR$ gibt es ein $x^{-1} \in IR$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$

Oft ist es notwendig, einen Term in eine andere Form zu bringen, um ihn zu **vereinfachen** oder um aus einem **Summenterm** einen **Produktterm** zu machen. Dabei gilt für das Auflösen von **Klammern** folgende Regel:

$$a+(b-c+d) = a+b-c+d$$
$$a-(b-c+d) = a-b+c-d$$

Steht vor der Klammer ein Minuszeichen, so müssen beim Auflösen der Klammer alle Rechenzeichen in der Klammer umgekehrt werden.

Beispiel:

$-(3xy+2z-13) = -3xy-2z+13$

Übungsaufgaben mit Lösungen:

Löse die Klammern auf und vereinfache:

a) $4x^2 - (6x^2 - 2x + 5)$ b) $-(-4(-a)b - (ab-b))$

Lösungen:

a) $-2x^2 + 2x - 5$ b) $-3ab - b$

Löse die Klammern auf und vergleiche die Ergebnisse:

Vereinfachen von Termen

Der Term $7xyz + 5a^2 - 3xyz + a^2$ kann einfacher geschrieben werden (vereinfacht werden), wenn man die Summanden mit gleichen Variablen zusammenfasst:

$7xyz + 5a^2 - 3xyz + a^2 = 4xyz + 6a^2$

Der Term auf der rechten Seite der Gleichung ist kürzer und dadurch für das Rechnen einfacher als der Term auf der linken Seite der Gleichung. Setzt man für die **Variablen** Zahlen ein, erhält man auf beiden Seiten der Gleichung denselben Wert.
Wenn ein Term nur Summanden mit verschiedenen Variablen hat, kann er nicht vereinfacht werden: $8xy^2 - 3 + 2x^2y$ kann nicht vereinfacht werden.

Übungsaufgaben mit Lösungen:

Vereinfache die Terme so weit wie möglich:

a) $2ab + 8ab -17ba$ b) $2x^2 - x + 0{,}5x^2 + 3x - 1 + 0{,}75x + 3$
c) $-3yz - 3y - 2z - 7y + 6yz + 5z - 11zy$ d) $x^2y^2 + xy^2 - x^2y$

Lösungen :

a) $-7ab$ b) $2{,}5x^2 + 2{,}75x + 2$ c) $-8yz - 10y + 3z$ d) kann nicht vereinfacht werden

Beim Zusammenfassen von Faktoren gilt die Regel „Punktrechnung vor Strichrechnung“. Als Punktrechnung bezeichnet man Multiplikation und Division, Addition und Subtraktion heißen auch Strichrechnung.

Beispiel: $4a \cdot 5b \cdot (-c) + 2abc - 3ab \cdot 0{,}5c = -20abc + 2abc - 1{,}5abc = -19{,}5abc$

Übungsaufgaben mit Lösungen:

Vereinfache die Terme so weit wie möglich:

a) $2x \cdot 3y - 7x \cdot (-2y) + 9x \cdot (-y)$ b) $k \cdot 5pm - 7kp \cdot 2m + 3k \cdot 2p \cdot 7m - (-2pm) \cdot (-k)$

Lösungen:

a) $11xy$ b) $31kpm$

Ausmultiplizieren und Ausklammern

Ein Term wird als **Summenterm (Summe)** bezeichnet, wenn die zuletzt auszuführende Rechenoperation eine Addition oder Subtraktion ist. Ein Term heißt ein **Produktterm (Produkt)**, wenn die zuletzt auszuführende Rechenoperation eine Multiplikation ist.

Beispiele für Summen:

3a+4b oder 17z-2x

Beispiele für Produkte:
(a-b)(a+b) oder a(3-b)

Um ein Produkt in eine Summe umzuwandeln, muss man die Faktoren ausmultiplizieren:

$5x(3x-2y+z)=5x\cdot 3x-5x\cdot 2y+5x\cdot z=15x^2-10xy+5xz$ **(Ausmultiplizieren)**

Um eine Summe in ein Produkt umzuformen, das heißt zu faktorisieren, klammert man aus den Summanden gemeinsame Faktoren aus:

$6ab-3ac+12a^2+3=3a(2b-c+4a+1)$
$-5uv+10uw-15uz=-5u(v-2w+3z)$ **(Ausklammern eines gemeinsamen Faktors)**

Hinter diesen Umformungen steht das **Distributivgesetz:**

Für alle $x, y, z \in$ IR gilt: $x(y+z)=xy+xz.$

Übungsaufgaben mit Lösungen:

Forme durch Ausmultiplizieren um. Vereinfache den Term dann so weit wie möglich:

a) $(x+3)(2x-5)$ b) $(2a-4b)(3b+a)(a-b)$
c) $x+15(y+z)-9(x-y-z)-3(x+y+z)$ d) $2a^2bc(3ab^2c-7abc^2)-(6a^3b^3c^2+5ab^2)$

Lösungen :

a) $2x^2+x-15$ b) $2a^3-14ab^2+12b^3$ c) $-11x+21y+21z$ d) $-14a^3b^3c-5ab^2$

Verwandle durch Ausklammern eines möglichst großen Faktors die Summe in ein Produkt:

a) $5abc-10b^2c+25abc^2$ b) $13x^2+39x^3-26x^2$ c) $0,5(a+b)-0,25(a+b)$
d) $(a+b)(x+y)+(b+c)(x+y)$

Lösungen:
a) $5bc(a-2b+5ac)$ b) $13x^2(-1+3x)$ c) $0,25(a+b)$ d) $(x+y)(a+2b+c)$

2.2 Binomische Formeln

Zum Umformen von Summen oder Produkten sind die folgenden Formeln oft hilfreich:

1.$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
2.$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3. $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Übungsaufgaben mit Lösungen:

Forme mit Hilfe der binomischen Formeln um:

a) $(2x+7a)^2$ b) $(3c^2-5bc)^2$ c) $4x^2+12xy+9y^2$ d) $9a^2-6ab+b^2$ e) $(3c-5)(3c+5)$
f) $0{,}25-x^2y^2$

Lösungen:

a) $4x^2+28ax+49a^2$ b) $9c^4-30bc^3+25b^2c^2$ c) $(2x+3y)^2$ d) $(3a-b)^2$ e) $9c^2-25$
f) $(0{,}5-xy)(0{,}5+xy)$

3. Gleichungen

3.1 Lineare Gleichungen

Eine Gleichung der Form **ax + b = 0** mit a $\neq$ 0 und x $\in$IR heißt **lineare Gleichung**.

Die Lösungen einer solchen Gleichung findet man, indem man sie „nach x auflöst“.

Beispiel: $13(x+2)=5(x+3) \Leftrightarrow 13x+26=5x+15 \Leftrightarrow 8x=-11 \Leftrightarrow x=-\frac{11}{8}$

Das Zeichen $\Leftrightarrow$ heißt **Äquivalenzzeichen.** Es verbindet Gleichungen, die dieselbe **Lösungsmenge** haben.

Übungsaufgaben mit Lösungen:

Bestimme die Lösung der linearen Gleichung:

a) 3(*x*+2) = 5(*x*-1) b) 2(*x*-5) - 3(*x*-2) = 0 c) $\frac{3(x-2)}{5}+\frac{2(x-1)}{7}=x+3$

Lösungen:

a) **L** = {5,5} b) **L** = {-4} c) **L** = {-39,25}

3.2 Bruchgleichungen

Gleichungen, die Terme in Bruchform enthalten, werden **Bruchgleichungen** genannt.

Beispiele: $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{4}{x^2-1}$ D = IR/{-1;1} $\frac{2x-1}{x-2}=\frac{x+1}{x+2}$ D = IR/{-2; 2}

Weil die Division durch 0 nicht definiert ist, muss man für die **Bruchterme** der Gleichung den **maximalen Definitionsbereich D** festlegen. Der maximale Definitionsbereich ist die Menge aller Zahlen, die für die Variable eingesetzt werden dürfen, damit der Term immer einen definierten Wert erhält.

Um die Lösung einer Bruchgleichung zu finden, formt man sie durch die Multiplikation der Brüche mit dem **Hauptnenner** und durch Kürzen gemeinsamer Faktoren um.

$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{4}{x^2-1}$ D = IR/ {-1 ;1} Der Hauptnenner ist x^2-1 = (x-1)(x+1).

$\frac{2(x^2-1)}{x-1}+\frac{3(x^2-1)}{x+1}=\frac{4(x^2-1)}{x^2-1}$ Die Brüche werden gekürzt. Man erhält die Gleichung:

$2(x+1)+3(x-1)=4 \Leftrightarrow 5x=5 \Leftrightarrow x=1$ Da aber 1 $\notin$ D, gibt es keine Lösung. **L** = { }.

$\frac{2x-1}{x-2} = \frac{x+1}{x+2}$ D = IR/ {-2; 2} Der Hauptnenner ist (x-2)(x+2). Nach dem Multiplizieren und Kürzen erhält man die quadratische Gleichung

$$(2x-1)(x+2) = (x+1)(x-2) \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4$$

Da beide Lösungen im Definitionsbereich liegen, ist **L** = {0; -4} die Lösungsmenge der Bruchgleichung.

Übungsaufgaben mit Lösungen:

Bestimme die Lösungsmenge der Bruchgleichung:

a) $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{x+3} = \frac{6}{x+2}$ b) $\frac{8}{x^2-1} = \frac{4}{x-1} + \frac{3}{x+1}$ c) $\frac{x}{3} + 1 = \frac{4}{x-1} - \frac{10}{x-2}$

Lösungen:

a) **L** = $\left\{3\frac{2}{7}\right\}$ b) **L** = { } c) **L** = {0}

3.3 Quadratische Gleichungen

Gleichungen der Form **ax² + bx + c = 0; a ≠ 0** werden als **quadratische Gleichungen** bezeichnet. Es gibt verschiedene Verfahren, Lösungen für quadratische Gleichungen zu finden. Ein bekanntes Verfahren ist die Lösung mit der folgenden Lösungsformel:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \wedge x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Der Term $b^2 - 4ac$ heißt **die Diskriminante**. Die Existenz und die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung hängen vom Vorzeichen der Diskriminante ab. Es gilt:

1. Fall $b^2 - 4ac < 0$, dann hat die quadratische Gleichung keine reelle Lösung **L** = { }
2. Fall $b^2 - 4ac = 0$, dann hat die quadratische Gleichung eine Lösung **L** = $\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
3. Fall $b^2 - 4ac > 0$, dann hat die quadratische Gleichung zwei Lösungen, wie oben in der Formel angegeben.

Übungsaufgaben mit Lösungen:

Löse die quadratischen Gleichungen durch Anwenden der Lösungsformel:

a) $2x^2+4x+5 = 0$ b) $3x^2-1 = 0$ c) $3x^2+2,7x-9,66 = 0$ d) $3x^2-6x+3 = 0$

Lösungen:

a) **L** = { } b) **L** = $\left\{\sqrt{\frac{1}{3}};-\sqrt{\frac{1}{3}}\right\}$ c) **L** = $\left\{\frac{7}{5};-\frac{23}{10}\right\}$ d) **L** = {1}

Bestimme die Lösungsmenge **L** für den Bereich der reellen Zahlen:

a) $(x-3)(x+5) = 0$ b) $x^3+2x^2+3x = 0$ c) $(2-3x^2)^2 = 0$ d) $2(0{,}6x^2+3)^3 = 0$

Lösungen:

a) **L** = {3; 5} b) **L** = {0} c) **L** = $\left\{\sqrt{\frac{2}{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$ d) **L** = { }

Biquadratische Gleichungen:

Eine Gleichung der Form $ax^4+bx^2=0, a\neq 0$**,** bei der das kubische und das lineare Glied fehlen, heißt biquadratische Gleichung. Man findet die Lösungen dieser Gleichungen, indem man sie durch eine **Substitution** auf quadratische Gleichungen zurückführt:

Beispiel: Zu lösen ist die Gleichung
$x^4+\frac{5}{16}x-\frac{9}{64}=0$.
Man ersetzt (substituiert) $x^2 = z$ und erhält die quadratische Gleichung
$z^2+\frac{5}{16}z-\frac{9}{64}=0$.
Mit der Lösungsformel findet man zwei Lösungen
$z_1=\frac{1}{4}\wedge z_2=-\frac{9}{16}$.
Die Substitution wird jetzt wieder rückgängig gemacht
$x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\wedge x_2=-\frac{1}{2}$
$x^2=-\frac{9}{16}\Rightarrow x_3\notin IR\wedge x_4\notin IR$
Die Gleichung 4. Grades hat also zwei Lösungen **L** = $\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$.

Übungsaufgaben mit Lösungen:

Bestimme die Lösungsmenge:

a) $x^4-13x^2+36=0$ b) $16x^4-40x^3+9=0$ c) $x^6-19x^2-216=0$

Lösungen:
a) **L =** $\{-3;-2;2;3\}$ b) **L** = $\left\{-\frac{3}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right\}$ c) **L** = $\{-2;3\}$

4. Lineare Funktionen

Als **Funktion** $x \to f(x)$ bezeichnet man eine eindeutige Zuordnung, die jedem $x \in D$ eindeutig einen **Funktionswert** $f(x) \in W$ zuordnet. Die Menge *D* heißt **Definitionsbereich** oder **Urbildmenge** und die Menge *W* heißt **Wertebereich** oder **Bildmenge** der Funktion *f*. Als Definitionsbereich einer Funktion kann zum Beispiel die Menge **R** der reellen Zahlen festgelegt werden.

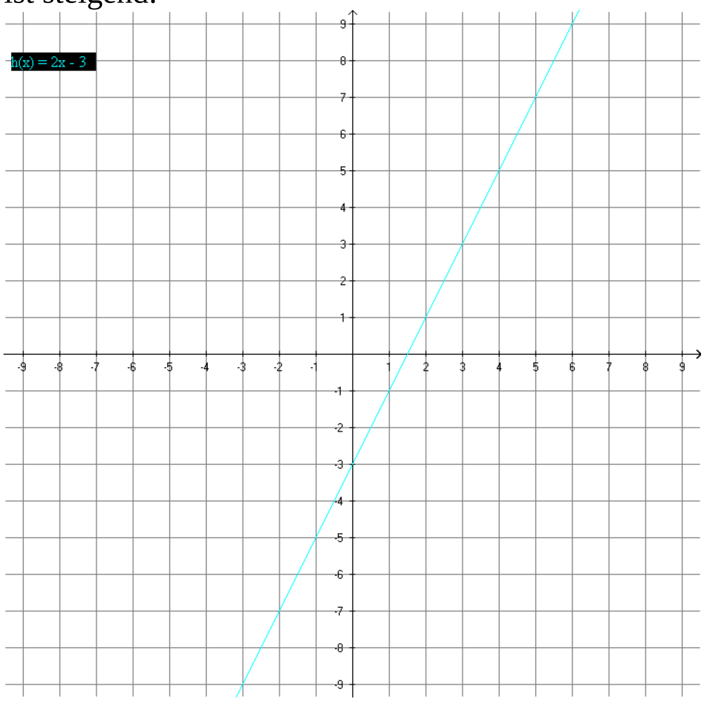
Eine **lineare Funktion** hat die allgemeine Form $f(x) = mx + n$. Der **Graph** einer linearen Funktion ist eine Gerade mit der **Steigung** *m*. Für die Berechnung von *m* gilt die folgende Formel: $\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$, mit zwei verschiedenen Punkten $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ auf dem Funktionsgraphen.
Für $m > 0$ ist die Gerade steigend, für $m < 0$ ist die Gerade fallend.
n heißt der **Abschnitt auf der y-Achse**.

Beispiel: Der Graph der Funktion f(x) = 2x - 3 hat die Steigung 2, der Abschnitt auf der y-Achse ist -3. Als Definitionsbereich *D* wird die Menge **R** aller reellen Zahlen festgelegt.
Man berechnet die Punkte der Graphen von f, indem man für im Funktionsterm für x Zahlen aus dem Definitionsbereich einsetzt und die zugeordneten Werte f(x) ausrechnet. Einige der Paare (x/f(x)) sind in der **Wertetabelle** dargestellt:

x	-2	-1	0	1	**1,5**	2
f(x)=2x-3	-7	-5	-3	-1	**0**	1

Setzt man für x die Zahl 1,5 ein, so erhält man den Wert 0. An der Stelle x = 1,5 schneidet der Funktionsgraph die **x-Achse**, 1,5 heißt die **Nullstelle** der Funktion f. Man kann die Nullstelle direkt berechnen, indem man die Gleichung f(x) = 0 löst.

Die Abbildung zeigt die Darstellung des Graphen von f im **Koordinatensystem**, die Gerade ist steigend:



Übungsaufgaben mit Lösungen:

Berechnen Sie die Steigung *m* zwischen den Punkten A und B mit Hilfe der Formel für *m*:

a) A(0/3) B(1/-5) b) A(7/1) B(9/1) c) A(-3/2) B(2/5)

Lösungen:

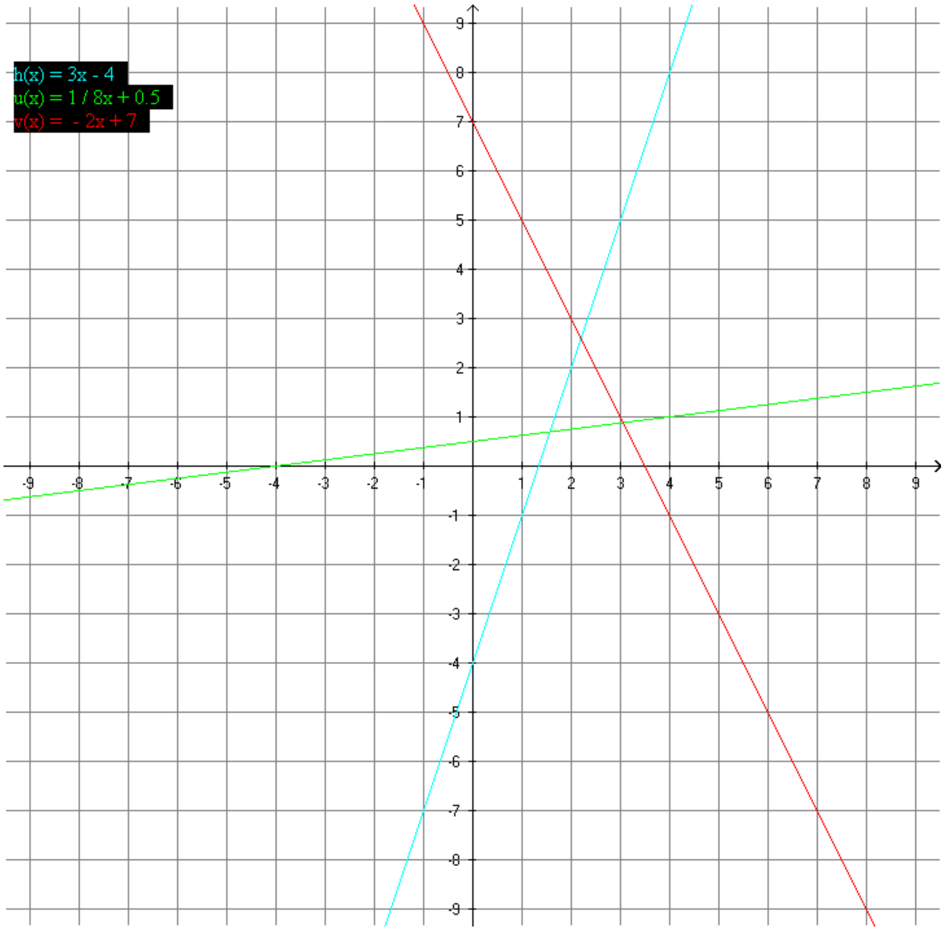
a) -8 b) 0 c) $\frac{3}{5}$

Geben Sie die Steigung und zeichnen Sie den Graphen von f mit einer Wertetabelle:

a) $f(x) = 3x - 4$ b) $f(x) = \frac{1}{8}x + 0{,}5$ c) $f(x) = -2x + 7$

Lösungen:

a) $m = 3$ b) $m = \frac{1}{8}$ c) $m = -2$



5. Ebene Geometrie

5.1. Winkelsätze

Zwei verschiedenen Geraden in einer Ebene heißen **parallel**, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben.

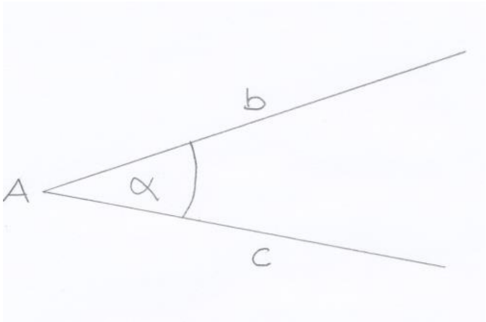


Abb. 0: A heißt der **Scheitel** des Winkels α, die Strahlen b und c heißen die **Schenkel** des Winkels α.

Werden zwei Geraden a, und b von einer dritten Geraden c geschnitten, so nennt man die Winkel α und β **Stufenwinkel.**
Sind die Geraden a und b parallel, so sind die Stufenwinkel α und β gleich groß.

Abb.1: Stufenwinkel

Zwei Winkel α und β heißen **Nebenwinkel**, wenn sie einen gemeinsamen Schenkel haben und die beiden anderen Schenkel auf einer Geraden liegen.

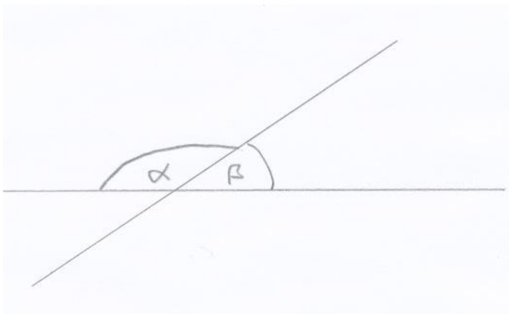


Abb.2: Nebenwinkel

Schneiden sich zwei Geraden a und b, so heißen die gegenüberliegenden Winkel α und β **Scheitelwinkel.** Scheitelwinkel sind gleich groß.

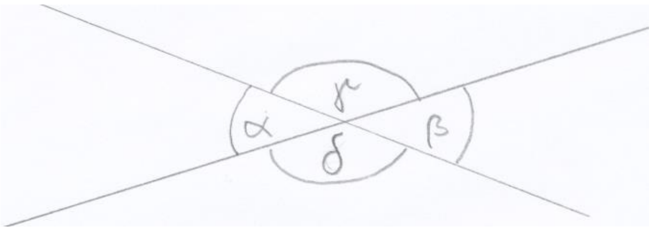


Abb.3: Scheitelwinkel $\alpha = \beta$ und $\gamma = \delta$

In einem **Dreieck** ist die Summe der **Innenwinkel** α, β und γ gleich 180°.

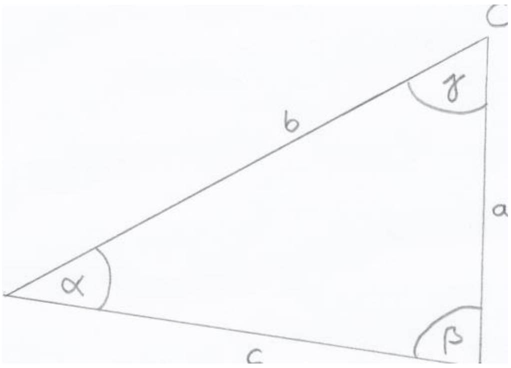


Abb.4: Winkelsumme im Dreieck

Übungsaufgaben mit Lösungen:

a) Welche Winkel in der Abbildung sind gleich groß? Es gilt a ∥ b und c ∥ d.

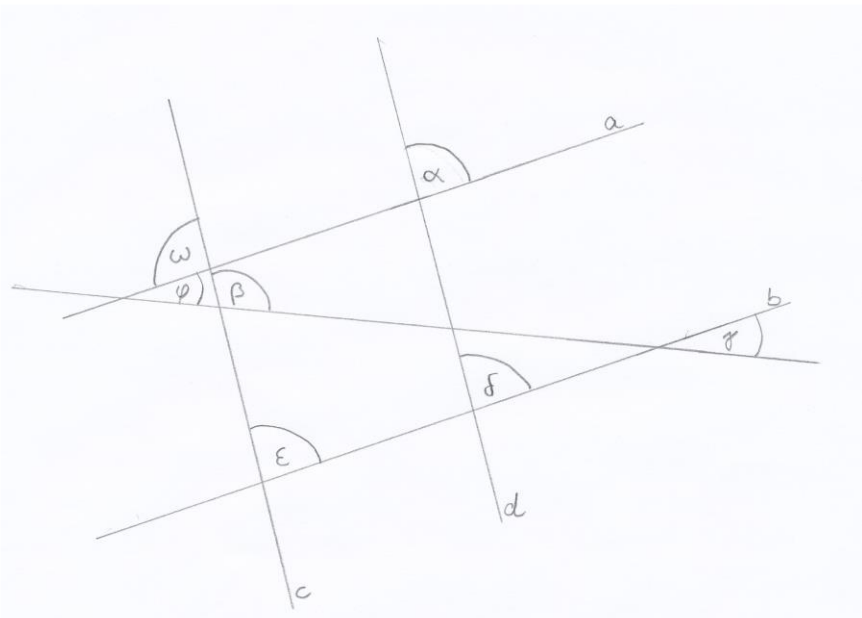
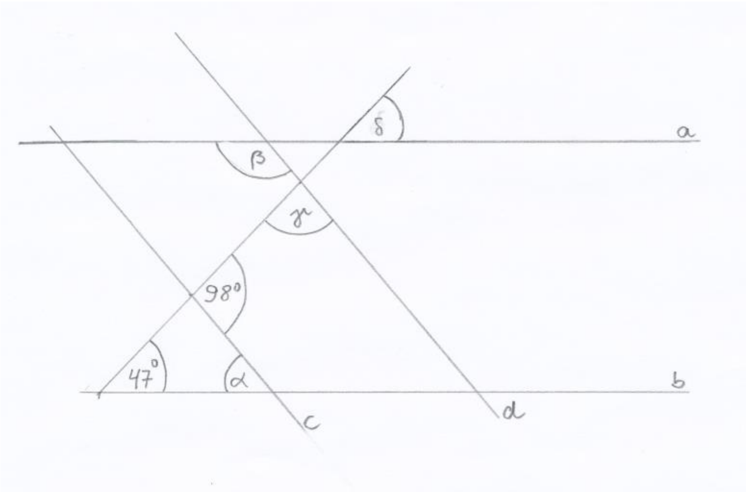


Abb.5

Lösung: $\varepsilon = \delta = \alpha$, $\varphi = \gamma$

b) Berechne die Größe der Winkel α, β, γ und δ!



Lösung: α = 51°, β = 129°, γ = 82°, δ = 47°

5.2 Dreiecke

Zwei Figuren heißen zueinander **kongruent**, wenn sie sich zur Deckung bringen lassen.
Zwei kongruente Dreiecke stimmen in ihren Innenwinkeln überein, und die Seiten, die an diesen Winkeln liegen, sind gleich lang.
Ob zwei Dreiecke kongruent sind, kann man mit Hilfe der **Kongruenzsätze für Dreiecke** feststellen, denn es reicht aus, dass sie in einigen bestimmten Stücken übereinstimmen, damit sie kongruent sind.
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn

- sie in der Länge einer Seite und in den Größen der beiden dieser Seite anliegenden Winkel übereinstimmen **WSW**.
- sie in den Längen von zwei Seiten und in der Größe des eingeschlossenen Winkels übereinstimmen **SWS**.
- sie in den Längen ihrer Seiten übereinstimmen **SSS**.
- sie in den Längen von zwei Seiten und in der Größe des Winkels übereinstimmen, der der längeren Seite gegenüberliegt **SSW**

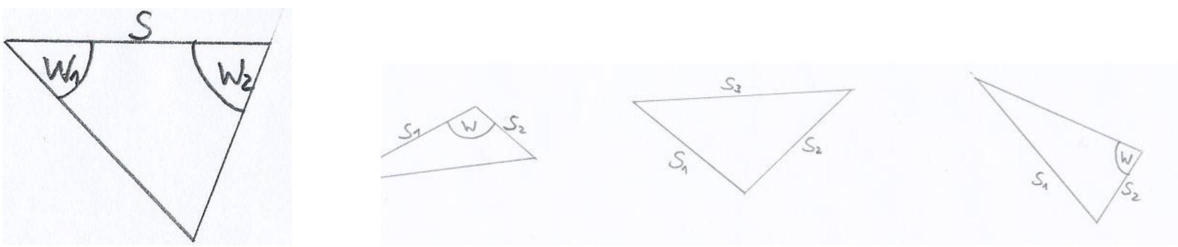


Abb. 7: Kongruenzsätze

Besondere Dreiecke

Einige Dreiecke weisen besondere Eigenschaften auf. Hierzu zählen **rechtwinklige** Dreiecke, **gleichschenklige** und **gleichseitige** Dreiecke.

Dreiecke mit einem **rechten Winkel** (90°) heißen **rechtwinklige** Dreiecke. Ein Dreieck mit **zwei** gleich langen Seiten heißt **gleichschenkliges** Dreieck. Sind **alle** Seiten gleich lang, so heißt es **gleichseitiges** Dreieck.

Übungsaufgaben mit Lösungen:

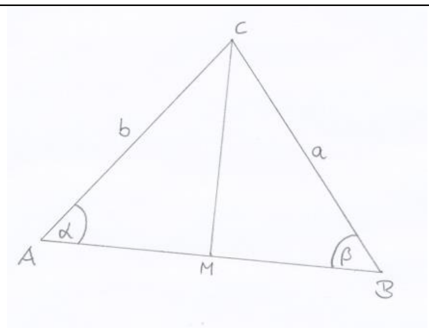
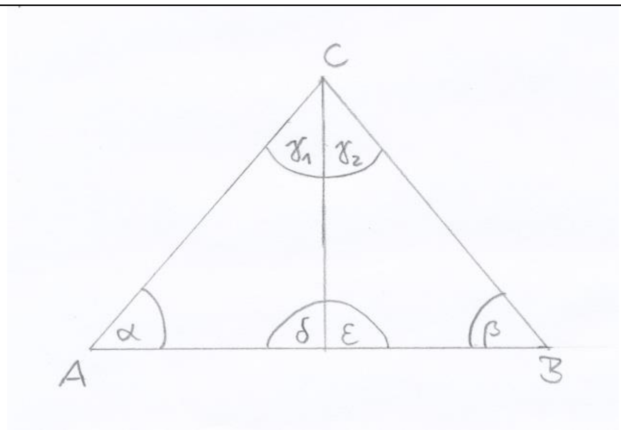
Beweise die folgenden drei Sätze. Du kannst dazu die Kongruenzsätze verwenden.

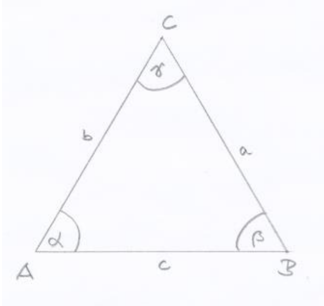
a) In einem gleichschenkligen Dreieck mit den Schenkeln a und b sind die Basiswinkel α und β gleich groß.

b) Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich groß, dann ist es gleichschenklig.

c) In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich groß, nämlich 60°.

Lösungen:

a)	Die Seiten a und b des Dreiecks ABC sollen gleich lang sein (Schenkel des Dreiecks). M ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Nach dem Kongruenzsatz SSS sind die beiden Dreiecke AMC und MBC kongruent. Damit sind die Basiswinkel α und β gleich groß.	
b)	Es soll α = β sein. Fälle das Lot (senkrechte Verbindung) von C auf die Seite $\overline{AB}$, die Winkel δ und ε sind beide 90° groß. Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°, deshalb sind in den Dreiecken ADC und DBC alle Winkel gleich groß. Die Seite $\overline{DC}$ ist eine gemeinsame Seite der beiden Dreiecke. Die Dreiecke ADC und DBC sind nach dem Kongruenzsatz WSW kongruent. Damit ist das Dreieck ABC gleichschenklig.	

c)	Das Dreieck ABC ist ein gleichschenkliges Dreieck mit a = b und damit gilt $\alpha = \beta$. Das Dreieck ABC ist ein gleichschenkliges Dreieck mit b = c und damit gilt $\beta = \gamma$. Also gilt $\alpha = \beta = \gamma = 60°$ (Winkelsumme 180°)	

5.3 Der Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man die Winkel, die den rechten Winkel einschließen, **Katheten**, und die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt **Hypotenuse.**

Der Satz des Pythagoras:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.

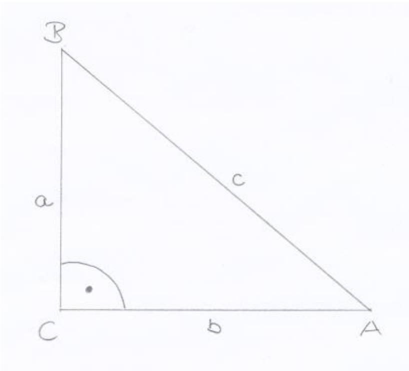


Abb. 10: Die Seiten a und b sind die Katheten, die Seite c ist die Hypotenuse des Dreiecks ABC

Übungsaufgaben mit Lösungen

1. Berechne die fehlende Seitenlänge im Dreieck ABC!
a) Der rechte Winkel hat den Scheitel A, a = 4 cm, b = 3 cm.
b) Der rechte Winkel hat den Scheitel B, a = 3,7 cm, c = 2,4 cm.
c) Der rechte Winkel hat den Scheitel C, a = 7 cm, b = 10 cm.

2. Berechne die Längen der Diagonalen eines Rechtecks mit den Seitenlängen 7,9 cm und 3,4 cm.

3. Zeichne die Punkte P und Q in ein Koordinatensystem und berechne ihren Abstand (Länge der Verbindungsstrecke zwischen P und Q).
P(2;3) Q(5;9)

Lösungen:
1. a) $c = \sqrt{7}$ cm b) b = 4,4 cm c) c = 12,2 cm
2. d = 8,6 cm 3. $d = 3\sqrt{5}$

5.4 Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck (Winkelfunktionen)

In einem rechtwinkligen Dreieck heißt die einem Winkel α gegenüberliegende Kathete **Gegenkathete von α** und die dem Winkel α anliegende Kathete **Ankathete von α.**

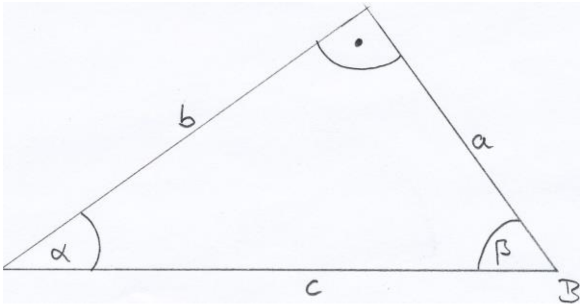


Abb. 11: b heißt Ankathete von α, a heißt Gegenkathete von α

Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck
Im rechtwinkligen Dreieck gelten die folgenden Beziehungen:

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} \qquad \cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} \qquad \tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

Übungsaufgaben mit Lösungen

1, Gib die Gegenkathete und die Ankathete des Winkels β im Dreieck ABC (Abb. 11) an.

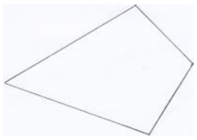
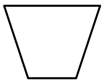
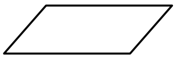
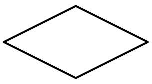
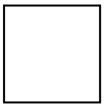
2. Berechne im rechtwinkligen Dreieck ABC alle fehlenden Winkel und Seitenlängen. Der rechte Winkel hat die Ecke C als Scheitel!

b) α = 22°, a = 1,9 cm b) β =83,5° , b = 13 cm c) a = 5,5 cm, b = 28 mm

Lösungen:
1. a heißt die Ankathete von β, b heißt die Gegenkathete von β.
a) b = 5,4 cm, c = 5,6 cm β = 68° b) a = 1,5 cm, b = 12,9 cm, α = 6,5° c) c = 6,2 cm, α = 62,5°, β = 26,8° (alle Werte sind gerundet)

5.5 Besondere Vierecke

Manche Vierecke haben besonderen Eigenschaften bezüglich ihrer Winkel und Seiten. Hier ist eine Übersicht über solche besonderen Vierecke:

Bezeichnung	Beispiel	Definition
Drachen		Es gibt zwei Paare benachbarter, gleich langer Seiten.
Trapez		Zwei Seiten sind parallel.
Parallelo-gramm		Gegenüberliegende Seiten sind parallel.
Raute		Gegenüberliegende Seiten sind parallel und alle Seiten sind gleich lang.
Rechteck		Gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleich lang und alle Innenwinkel sind rechte Winkel.
Quadrat		Alle Seiten sind gleich lang und alle Innenwinkel sind rechte Winkel.

Zusammenhänge zwischen den besonderen Rechtecken

Aus den Definitionen ergibt sich dieses Diagramm:

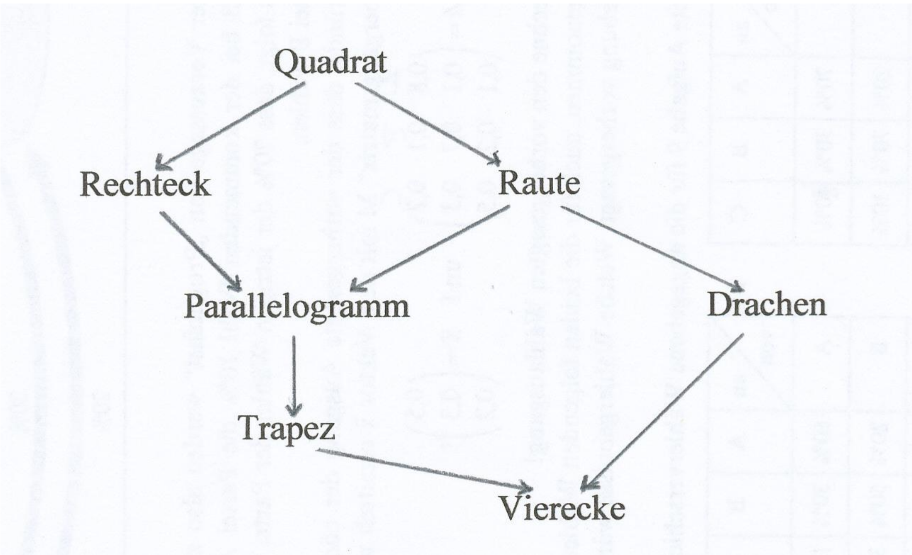


Abb. 13: Vierecke

Übungsaufgaben mit Lösungen

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie stimmt oder nicht stimmt!

a) Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm.
b) Jedes Parallelogramm ist ein Rechteck.
c) Jedes Trapez ist ein Parallelogramm.
d) Nicht jeder Drachen ist ein Parallelogramm.
e) Jedes Quadrat ist ein Trapez.

Lösungen:

a) stimmt   b) stimmt nicht   c) stimmt nicht   d) stimmt   e) stimmt

6. Fachvokabular

Zu Kapitel 1
-e Grundrechenart, en
-e Addition (+), addieren
-e Summe, en
-r Summand, en
-e Subtraktion (-), subtrahieren
-e Differenz, en
-e Multiplikation (·), multiplizieren
-r Faktor, en
-e Division (:), dividieren
-r Quotient, en

-r Bruch, e
-r Zähler
-r Nenner
einen Bruch erweitern mit a
einen Bruch kürzen mit a

-e Rechenregel, n
-e Lösung, en

-e Definition, en
-e Potenz, en, potenzieren
-e Basis, Basen
-r Exponent, en
-e Exponentgleichung, en
-r Term, e

-e Wurzel, n, Wurzel ziehen
-e Quadratwurzel (√)

-r Logarithmus, Logarithmen, logarithmieren
-r Zehnerlogarithmus
-r natürliche Logarithmus
-e Lösungsmenge, n
-e Exponentialgleichung, en

Zu Kapitel 2
-r Term, e
-r Summenterm, e
-r Produktterm, e
-e Klammer, n
eine Klammer auflösen
-e Variable, n
einen Term vereinfachen
ein Produkt ausmultiplizieren
einen gemeinsamen Faktor ausklammern
-e Binomischen Formeln

Zu Kapitel 3
-e Gleichung, en
-e lineare Gleichung, en
-s Äquivalenzzeichen
-e Lösungsmenge, en
-e Bruchgleichung, en
-r Bruchterm, e
-r maximale Definitionsbereich, e
-r Hauptnenner
-e quadratische Gleichung, en
-e Diskriminante, en
-e biquadratische Gleichung, en

Zu Kapitel 4
-e Funktion, en
-r Funktionswert, e
-r Definitionsbereich, e
-e Urbildmenge, en
-r Wertebereich, e
-e Bildmenge, en
-e lineare Funktion, en
-r Graph, en
-e Steigung, en
- r Abschnitt auf der y-Achse
-e y-Achse, en
-e x-Achse, en
-e Wertetabelle, en
-e Nullstelle, en
-s Koordinatensystem